23/03/2018
9º μάθημα

Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, τότε το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι ένα πολυώνυμο $Q_A(t)$ έτσι ώστε:

i) Το $Q_A(t)$ είναι κανονικό
ii) $Q_A(A)=0$
iii) Αν $P(t) \in \mathbb{K}(t): P(A)=0$ τότε $Q_A(t) \mid P_A(t)$

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, τότε: $P_A(A)=0$

Πόρισμα

Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, τότε $Q_A(t) \mid P_A(t)$

Ιδιαίτερα, $\deg Q_A \leq n$

Επειδή $Q_A(t) \mid P_A(t) \Rightarrow \exists R(t): P_A(t) = Q_A(t) \cdot R(t)$

Πρόταση

Τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $P_A(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες ενδεχομένως με διαφορετικές πολλαπλότητες

Απόδειξη

Ο ισχυρισμός είναι αληθής γενικά, εμείς όμως θα τον αποδείξουμε όταν το $P_A(t)$ έχει όλες τις ρίζες του στο σώμα $\mathbb{K}$. Επειδή, όπως είδαμε υπάρχει $R(t) \in \mathbb{K}[t]: P_A(t) = Q_A(t) \cdot R(t)$ έπεται ότι αν λ: ρίζα του $Q_A(t)$, τότε $Q_A(\lambda)=0$ και άρα: $P_A(\lambda) = \underbrace{Q_A(\lambda)}_{=0} \cdot R(\lambda)=0$
$\Rightarrow \lambda$: ρίζα του $P_A(t)$.

Έστω ότι λ: ρίζα του $P_A(t)$. Τότε το λ ιδιοτιμή του A και άρα υπάρχει $0 \neq X \in \mathbb{K}^n$ έτσι ώστε $AX = \lambda X$.

Τότε $A^2 X = AAX = A \cdot \lambda X = \lambda A \lambda = \lambda\lambda X = \lambda^2 X$

Επαγωγικά, $A^m X = \lambda^m \cdot X, \ \forall m \geq 1$

$(Q_A(A)) X = ?$

Υποθέτουμε ότι: $Q_A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k$.

Τότε $Q_A(A) = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_{k-1} A^{k-1} + A^k$ και επομένως

$$
\begin{aligned}
(Q_A(A)) X &= (a_0 I + a_1 A + \ldots + a_{k-1} A^{k-1} + A^k) X = \\
&= a_0 X + a_1 A X + \ldots + a_{k-1} A^{k-1} X + A^k X \overset{*}{=} \\
&= a_0 X + a_1 \lambda X + \ldots + a_{k-1} \lambda^{k-1} X + \lambda^k X = \\
&= (a_0 + a_1 \lambda + \ldots + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \lambda^k) X = Q_A(\lambda) \cdot X
\end{aligned}
$$

Άρα, $Q_A(A) \cdot X = Q_A(\lambda) \cdot X$

Επειδή $Q_A(A) = 0$, έπεται ότι $Q_A(\lambda) \cdot X = 0$.

Επειδή $X \neq 0$ έπεται ότι $Q_A(\lambda) = 0$, δηλαδή λ: ρίζα του $Q_A(t)$

Πόρισμα

Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{K})$ έχει n το πλήθος διακεκριμένες ιδιοτιμές.
Τότε $Q_A(t) = (-1)^n P_A(t)$

Απόδειξη

Από την υπόθεση $P_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1) \ldots (t - \lambda_n)$, όπου $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A.

Επειδή $Q_A(t) | P_A(t)$ και τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $P_A(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες και επειδή $Q_A(t)$ είναι κανονικό, έπεται ότι:

$$Q_A(t) = (-1)^n P_A(t)$$

Θεώρημα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και έστω ότι:

$$P_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{n_1} (t-\lambda_2)^{n_2} \cdots (t-\lambda_k)^{n_k}$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A

και $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

Τότε: $Q_A(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} (t-\lambda_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k)^{m_k}$ όπου $m_1 \leq n_1, \dots, m_k \leq n_k$

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = |A - tI_4| = \begin{vmatrix} 2-t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-t & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t) \begin{vmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 1 \\ 0 & -2 & 4-t \end{vmatrix} =$$

$$= (2-t)(2-t) \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ -2 & 4-t \end{vmatrix} = (2-t)^2 (4-t-4t+t^2+2) =$$

$$= (2-t)^2 (t^2 - 5t + 6)$$

$$= (2-t)^2 (t-2)(t-3) = (t-2)^3 \cdot (t-3)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_A(t) = (t-2)^3 (t-3)}$$

Διαιρέτες του $P_A(t)$: $\cancel{1}$, $\cancel{t-2}$, $\cancel{t-3}$, $(t-2)(t-3)$, $\cancel{(t-2)^2}$, $(t-2)^2(t-3)$, $(t-2)^3(t-3)$, $\cancel{(t-2)^3}$

Επειδή $Q_A(t) | P_A(t)$, έπεται ότι το $Q_A(t)$ είναι ένα από τα παραπάνω. Επειδή τα $Q_A(t)$ και το $P_A(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες, δηλαδή $2, 3$, έπεται ότι το $Q_A(t)$ είναι ένα από τα: $(t-2)(t-3)$, $(t-2)^2(t-3)$, $(t-2)^3(t-3)$.

• $(t-2)(t-3)$

$$(A-2I_4)(A-3I_4)=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-2&1\\0&0&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&-2&2\end{pmatrix}\neq 0$$

Άρα, $Q_A(t)\neq(t-2)(t-3)$

• $(t-2)^2(t-3)$

$(A-2I_4)^2(A-3I_4)= \dots = 0$

Επομένως, το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A είναι το $Q_A(t)=(t-2)^2(t-3)$.

$$Q_A(t)=(t-2)^2(t-3)=(t^2-4t+4)(t-3)=t^3-4t^2+4t-3t^2+12t-12$$
$$=t^3-7t^2+16t-12$$

Ξέρουμε ότι $Q_A(A)=0 \Rightarrow A^3-7A^2+16A-12I_4=0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow A^3-7A^2+16A=12I_4$$
$$\Rightarrow A(A^2-7A+16)=12I_4$$
$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{12}(A^2-7A+16I_4)\right)=I_4$$

$\Rightarrow$ Άρα, A αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\frac{1}{12}(A^2-7A+16I_4)$

Άσκηση : $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Να υπολογιστεί ο πίνακας :

$A^{202} - A^{147} + 2I_2$

Λύση

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} -2-t & 3 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} = -4+2t-2t+t^2+3 = t^2-1$$

$$\Rightarrow P_A(t) = t^2-1 = (t-1)(t+1)$$

Άρα, $Q_A(t) = (t-1)(t+1) \Rightarrow Q_A(t) = P_A(t)$

Επειδή $Q_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - I_2 = 0 \Rightarrow \boxed{A^2 = I_2}$ (1)

Από την σχέση (1) προκύπτει ότι : $A^k = \begin{cases} I_2, & \text{αν } k: \text{άρτιος} \\ A, & \text{αν } k: \text{περιττός} \end{cases}$

$\Rightarrow A^{202} = I_2, \quad A^{147} = A.$

Τότε $A^{202} - 3A^{147} + 2I_2 = I_2 - 3A + 2I_2 = -3A + 3I_2 = -3(A - I_2)$

$$= \begin{pmatrix} 9 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι: $P_A(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{n_1} (t-\lambda_2)^{n_2} \dots (t-\lambda_k)^{n_k}$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A και
$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$.
Τότε A: διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow$ $Q_A(t) = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\dots(t-\lambda_k)$.

Παράδειγμα (προηγούμενη άσκηση)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Τότε } Q_A(t) = (t-1)^2 = (t-1)(t+1)$$

Από το παραπάνω θεώρημα: ο A-διαγωνοποιήσιμος και είναι όμοιος με τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Παράδειγμα

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και υποθέτουμε ότι $A^3 = A$. Τότε ο A: διαγωνοποιήσιμος

Λύση

Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t) = t^3 - t$. Τότε $Q(A) = A^3 - A = 0$.
Από θεωρία, ξέρω ότι $Q_A(t) \mid Q(A)$, δηλαδή $Q_A(t) \mid t(t-1)(t+1)$

Διαιρέτες του $t(t-1)(t+1)$: $1,\ t-1,\ t,\ t+1,\ t(t-1),\ t(t+1),\ (t-1)(t+1)$
$t(t-1)(t+1)$

Σε κάθε περίπτωση, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων παραγόντων, και άρα από το θεώρημα ο A: διαγωνοποιήσιμος.

Παράδειγμα

$A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A^2 = 2018A$. Είναι ο A διαγωνοποιήσιμος;

Όπως πριν!

Παράδειγμα

1] $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$Q_A(t) = t^2 - 1$. Τότε $Q_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 - I_2 = 0 \Rightarrow A^2 = I_2 \Rightarrow \boxed{A^{-1} = A}$

2] $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$P_A(t) = \ldots = -t^3 + 2t - 1$

Από Θεώρημα Cayley-Hamilton έχουμε:

$P_A(A) = 0 \Rightarrow -A^3 + 2A - I_3 = 0 \Rightarrow A(-A^2 + 2I_3) = I_3 \Rightarrow \boxed{A^{-1} = -A^2 + 2I_3}$

Άσκηση: Να βρεθούν όλοι οι 2×2 πίνακες A πραγματικών αριθμών έτσι ώστε $A^2-3A+2I_2=0$

Λύση

Θεωρούμε το πολυώνυμο $Q(t)=t^2-3t+2=(t-2)(t-1)$

Τότε $Q(A)=0$ και άρα $Q_A(t)\mid Q(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow Q_A(t)$ είναι ένα εκ των $\cancel{1}$, $t-1$, $t-2$, $(t-1)(t-2)$.

- $t-1$ τότε $A=I_2$

- $t-2$ τότε $A=2I_2$

- $(t-1)(t-2)$ τότε $(A-I_2)\cdot(A-2I_2)=0 \Rightarrow A$: διαγωνοποιήσιμος από θεώρημα και άρα ο A όμοιος με τον $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(I) Εύρεση Αντιστρόφου Αντιστρέψιμου Πίνακα.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή $P_A(0) \neq 0$, τότε
αν $Q_A(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k$, τότε: $a_0 \neq 0$ και
επειδή $Q_A(A) = 0 \Rightarrow a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{k-1} A^{k-1} + A^k = 0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow a_0 I_n = A(-a_1 I_n - a_2 A - \dots - a_{k-1} A^{k-2} - A^{k-1})$$
$$\Rightarrow A^{-1} = \left(-\frac{a_1}{a_0} I_n - \frac{a_2}{a_0} A - \dots - \frac{a_{k-1}}{a_0} A^{k-2} - \frac{1}{a_0} A^{k-1}\right)$$

(II) Εύρεση Πίνακα $G(A)$, αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ και $G(t) \in \mathbb{K}[t]$.

Ευκλείδεια διαίρεση του $G(t)$
$$G(t) = P_A(t) \cdot U(t) + R(t), \text{ όπου: είτε } R(t) = 0 \text{ είτε: } \deg R(t) < \deg P_A(t).$$
$$G(t) = Q_A(t) V(t) + S(t), \text{ όπου είτε } S(t) = 0 \text{ είτε } \deg S(t) < \deg Q_A(t)$$

Τότε: $G(A) = \cancel{P_A(t)}^{\,0} U(A) + R(A) = R(A)$

$G(A) = \cancel{Q_A(t)}^{\,0} \cdot V(A) + S(A) = S(A)$

Παράδειγμα
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad G(t) = t^6 - 7t^5 + 16t^4 - 10t^3 - 14t^2 + 33t - 23$$
$G(A) = ;$

Λύση

$Q_A(t) = t^3 - 7t^3 + 16t - 12$
$$G(t) = Q_A(t)(t^3+2) + (t+1) \Rightarrow G(A) = A + I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Έστω $f: E \to E$ ενδομορφισμός του $\mathbb{K}$-δ.χ. E, $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$.

$P_f(t) = |A - tI_n|$, όπου $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $\mathcal{B}$: τυχαία βάση του E.

Ορίζονται οι ενδομορφισμοί: $f^0 \underset{op.}{=} Id_E$, f, $f^2 = f \circ f$, ..., $f^k = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{k\text{-φορές}}$

Επίσης, $\forall \kappa \in \mathbb{K}$, ορίζεται ο ενδομορφισμός κf^m, $\forall m \geq 1$.

Επομένως, ορίζεται και ο ενδομορφισμός: $\underset{a_0 Id_E}{a_0} + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_m f^m$

όπου $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$, $m \geq 1$

Αν $Q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$, θέτε

$$Q(f) \underset{op}{=} a_0 Id_E + a_1 f + a_2 f^2 + \dots + a_m f^m$$

και $Q(f)(\vec{x}) = a_0 \vec{x} + a_1 f(\vec{x}) + \dots + a_m f^m(\vec{x})$

Άρα, $\forall Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, $\forall f: E \to E$ ενδομορφισμός του E, ορίζεται ο ενδομορφισμός $Q(f): E \to E$.

Πρόβλημα: Υπάρχει $Q(t) \in \mathbb{K}[t]$, $Q(t) \neq 0$: $Q(f) = 0$;

$$\mathcal{L}(E,E) = \{f: E \to E \mid f: \text{ενδομορφισμός του } E\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$$
$$f \longmapsto M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$$

Άρα, $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}(E,E) = \dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Επομένως, τα διανύσματα $Id_E = f^0, f, f^2, \dots, f^n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα

$\Rightarrow \exists\, a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \dots, n^2$ όχι όλα ίσα με το 0.

$a_0 Id_E + a_1 f + \dots + a_{n^2} f^{n^2} = 0$

Θέτοντας $Q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$ αποκτάμε ένα μη-μηδενικό πολυώνυμο : $Q(f) = 0$.

Ορισμός

Το <u>ελάχιστο πολυώνυμο</u> $Q_f(t)$ του ενδομορφισμού f είναι το κανονικό πολυώνυμο με τον μικρότερο βαθμό το οποίο μηδενίζει τον f.

Δουλεύοντας Ανάλογα Με Τη Θεωρία Ελαχίστου Πολυωνύμου Πίνακα έχουμε τα εξής:

1) Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_f(t)$ είναι ένα κανονικό πολυώνυμο έτσι ώστε i) $Q_f(f) = 0$ και
ii) $Q(f) = 0 \Rightarrow Q_f(t) / Q(t)$

2) Θεώρημα Cayley-Hamilton : $P_f(f) = 0$ $\qquad P_f(t) = |A - tI_n|$

3) Τα πολυώνυμα $P_f(t)$, $Q_f(t)$ έχουν τις ίδιες ρίζες.

4) Αν $P_f(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_k)^{n_k}$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του f και $n_1 + \dots + n_k = n$ τότε

a) $Q_f(t) = (t-\lambda_1)^{m_1} \dots (t-\lambda_k)^{m_k}$ όπου $m_1 \leq n_1, \dots, m_k \leq n_k$

β) Ο f: διαγωνοποιήσιμος $\Leftrightarrow Q_f(t) = (t-\lambda_1) \dots (t-\lambda_k)$

5) $Q_f(t) = Q_A(t)$, όπου $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ και $\mathcal{B}$: τυχαία βάση του E.